BÖLÜM 1

TEMEL BİLGİLER

1.1. Kümeler

Küme, bir takım nesneler topluluğudur. Kümenin içindeki nesnelere de o kümenin elemanları denir. A bir küme, a da bu kümenin bir elemanı ise $a \in A$ şeklinde yazılır ve "a, A kümesine aittir" diye okunur. Aksine a, A kümesine ait değil ise $a \notin A$ yazılır.

Kümeleri belirtmede iki yol izlenir. Birincisi, liste metodu ile, kümeyi bütün elemanlar ile parantez içinde yazmaktır. Örneğin, mutlak değeri 3 den küçük tam sayılar kümesi, $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ile gösterilir. İkinci metot ise, kümeyi kümenin elemanlarını karakterize eden özellikle belirtmektir.

Örneğin yukarıdaki küme $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ ile gösterilebilir. Bu dersimizde kullanılacak bazı kümelerin gösterimleri aşağıdaki gibidir.

Doğal sayılar kümesi: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$

Tam " " : $\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

Sıfırdan farklı tam sayılar kümesi: $\mathbb{Z}^*$ $= \mathbb{Z} - \{0\}$

Pozitif tam sayılar kümesi: $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,\dots\}$

Negatif " " " : $\mathbb{Z}^- = \{\dots,-2,-1\}$

Çift " " kümesi: $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\dots,-2,0,2,\dots\}$

Tek tam sayılar kümesi: $T = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\dots,-1,1,3,\dots\}$.

Her

$\forall n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Rasyonel sayılar kümesi: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

İrrasyonel " " : $\mathbb{I}$

Reel " " : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Karmaşık (kompleks) " " : $\mathbb{C}$

1.2. Bağıntılar

Bu bölümde, bağıntı kavramı tanımlanacak, denklik ve sıralama bağıntıları üzerinde durulacaktır.

Tanım 1.2.1 $n \geq 2$ olmak üzere $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri verilsin. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ kartezyen çarpım kümesinin her bir R alt kümesine $A_1, A_2, \ldots, A_n$ üzerinde bir n-li bağıntı denir. Ayrıca $R = \emptyset$ veya $R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ise o zaman R ye sırasıyla $A_1, A_2, \ldots, A_n$ üzerindeki boş bağıntı ve evrensel bağıntı denir.

A ve B boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere $A \times B$ nin " " her alt kümesine A dan B ye bir bağıntı denir. Özel olarak $A = B$ ise A da bir " denir.

R, A×B de bir bağıntı olsun

Tanım 1.2.2. $R \subseteq A \times B$ olsun. $\{a \in A \mid (a,b) \in R$ o.ş. bir $b \in B$ vardır$\}$ kümesine R nin **tanım kümesi**, $\{b \in B \mid (a,b) \in R$ o.ş. bir $a \in A$ vardır$\}$ " R nin **görüntü kümesi** denir. Eğer $(a,b) \in R$ ise **a ile b bağlantılıdır** denir ve aRb ile gösterilir.

Tanım 1.2.3. A kümesi üzerinde bir R bağıntısı verilsin.

(i) Her $a \in A$ için aRa ise R ye **yansıma özelliğine** sahiptir,

(ii) aRb şartını sağlayan her $a, b \in A$ için bRa ise R ye **simetri özelliğine** sahiptir,

(iii) aRb ve bRa şartını sağlayan her $a, b \in A$ için $a = b$ oluyorsa R ye **ters simetri özelliğine** sahiptir,

(iv) aRb ve bRc şartını sağlayan her $a, b, c \in A$ için aRc ise R ye **geçişme özelliğine** sahiptir, denir.

Tanım 1.2.4. Herhangi bir A kümesi üzerindeki bir R bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip ise o zaman R ye A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

Örnek: Her doğruyu kendisine paralel kabul edersek, doğrular arasındaki paralellik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

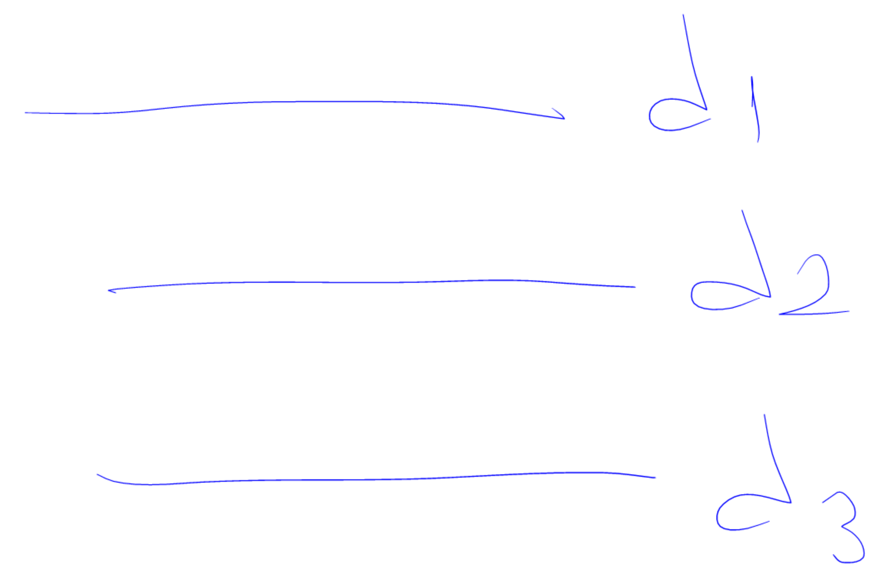
Tanım 1.2.5. R, A üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bir $a \in A$ nın denklik sınıfı $\bar{a} = \{ b \in A \mid bRa \}$ ile tanımlanır. Bütün denklik sınıflarının kümesi A/R ile gösterilir ve bölüm kümesi olarak adlandırılır.

$\bar{a} \neq \emptyset$ dır. $a \in \bar{a}$ olduğu

Örnek: $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerinde, farkları $n>0$ tamsayısı ile bölünebilen tam sayıları denk olarak tanımlarsak bu bir denklik bağıntısıdır, ayrıca $a \in \mathbb{Z}$ nin denklik sınıfı n ye bölündüğünde a ile aynı kalanı bırakan tüm tamsayılardan oluşur.

Çözüm: _ Her doğruyu kendine paralel olarak kabul ettiğimizden yansıma öz. gerç.

- $d_1 // d_2 \Rightarrow d_2 // d_1$ olduğundan simetri öz. gerç.
- $d_1 // d_2$ ve $d_2 // d_3$ ise $d_1 // d_3$ olduğundan geçişme öz. gerçekleşir



Bu bir denklik bağıntısıdır

(gerek ve yeter koşul)

Örnek: a, b ye denktir $\Leftrightarrow$ a ile b nin n ile bölümünden kalan aynıdır

Bu bağıntıyı $\sim$ ile göst.

i) $\forall a \in \mathbb{Z}$ $a - a = 0$ ve 0 sayısı n ile bölünebildiğinden $a \sim a$ olup yansıma öz. gerç.

$0 = n \cdot 0 + 0$

$(2 \mid 4$

$2 \mid -4$

ii) $a \sim b$ olsun. $b \sim a$ mıdır?

$a \sim b \Rightarrow n \mid a - b$ dir. (n, a−b yi böler)

Dolayısıyla $n \mid -(a-b) = b - a \Rightarrow b \sim a$ dır. Simetri öz. gerç.

(iii) $a,b,c \in \mathbb{Z}$ olsun $a \sim b$ ve $b \sim c$ olsun $a \sim c$ midir?

$$\left.\begin{array}{l} a \sim b \Rightarrow n \mid a-b \\ b \sim c \Rightarrow n \mid b-c \end{array}\right\} \Rightarrow n \mid (a-b) + (b-c) = a-c$$

$\Rightarrow n \mid a-c \Rightarrow a \sim c$ olur Geçişme öz

gerçekler. Bu bir denklik bağıntısıdır.

Bu denklik sınıflarının oluşturduğu kümeyi $\mathbb{Z}_n$ ile göst.

Önerme 1.2.6. R, A üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $a,b \in A$ için aRb olması için gerek ve yeter koşul $\bar{a} = \bar{b}$ olmasıdır. Yani $\forall a,b \in A$ için

$$aRb \iff \bar{a} = \bar{b}.$$

Önerme 1.2.7. R, A üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $a,b \in A$ için ya $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ ya da $\bar{a} = \bar{b}$ dir. Diğer bir ifadeyle a ve b elemanlarının denklik sınıfları ya çakışıktır ya da ayrıktır.

Önerme 1.2.8. R, A üzerinde bir denklik bağıntısı ise R nin belirttiği denklik sınıfları A nın bir ayrışımını belirtir. Tersine, A nın bir ayrışımı verilirse ayrışım kümelerini denklik sınıfları kabul eden A da bir denklik bağıntısı tanımlanabilir.

Önerme 1.2.6 (İspat) aRb olması için $\Leftrightarrow$ $\bar{a} = \bar{b}$ olmasıdır

$\bar{a}$ bir küme

($\Rightarrow$:) aRb olsun. $\bar{a} = \bar{b}$ old. gösterelim $\bar{a}$ ve $\bar{b}$ birer küme iki

old.dan $\bar{a} \subset \bar{b}$ ve $\bar{b} \subset \bar{a}$ olduğunu göstermek

küme eşitliğinden ispat tamamlanır. $(\bar{a} = \{y \in A \mid yRa\})$

$x \in \bar{a}$ keyfi olsun. Buradan xRa olur. bir denklik bağıntısı old.dan

xRa ve aRb olup R bağıntısı $\bar{a} \subset \bar{b}$ ... (1) gereği

xRb olur. Buradan $x \in \bar{b}$ olur $\Rightarrow$

Tersine $y \in \bar{b}$ olsun yRb dir. R bir denklik bağıntısı old.dan aRb

iken bRa dır (Simetri öz. den) $\bar{b} \subset \bar{a}$ ... (2) gereği

yRb, bRa $\xrightarrow{\text{Geçişme}}$ özden yRa olur $y \in \bar{a}$ $\Rightarrow$

(1) ve (2) den $\bar{a} = \bar{b}$ olur.

($\Leftarrow$:) $\bar{a} = \bar{b}$ olsun. aRb old. göst. $a \in \bar{a}$ old.dan $a \in \bar{b}$ dir. Denklik

sınıfının tanımı gereği aRb olur.

Önerme 1.2.7 (İspat) a ve b elemanlarının denklik sınıflarının ayrık olmadığını yani $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda $\exists\, x \in \bar{a} \cap \bar{b}$ vardır yani $x \in \bar{a}$ ve $x \in \bar{b}$ dir.

$$\left.\begin{array}{l} x \in \bar{a} \Rightarrow xRa \\ x \in \bar{b} \Rightarrow xRb \end{array}\right\} \Rightarrow$$

xRa ise R bağıntısı simetri öz. gereğinde aRx yazılabilir

aRx ve xRb yani geçişme özden aRb olup $\bar{a} = \bar{b}$ olur

Not [Tanım (Bir kümenin Ayrışımı)] A boş olmayan bir küme olmak üzere birleşimleri A yı veren A nın baştan farklı ayrık alt kümelerinin ailesine A kümesinin parçalanışı ya da A kümesinin bir ayrışımı denir. Bu tanımı matematiksel olarak aşağıdaki gibi verebiliriz. $A \neq \emptyset$ olmak üzere (i) $\forall i \in I$ için $A_i \subset A$ olmak üzere $A_i \neq \emptyset$

(ii) $\forall i, j \in I$ ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$

(iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ şartları sağlanırsa $\{A_i \mid A_i \subset A, i \in I\}$ kümesine A nın bir ayrışımı denir. Burada I indis kümesini gösterir.

Örnek: $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin bir ayrışımı

$A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e\}$, $A_3 = \{f, g\}$ dır.

Yani $\{A_1, A_2, A_3\}$, A kümesinin bir parçalanışıdır.

(i) A_1, A_2, A_3 kümeleri baştan farklıdır

(ii) $A_1 \cap A_2 = \emptyset = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3$

(iii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{i=1}^{3} A_i = A$

Önerme 1.2.8 (İspat) R, A üzerinde bir denklik bağıntısı olsun $a \in \bar{a}$

(i) $a \in \bar{a}$ old. dan $\bar{a} \neq \emptyset$ dır.

(ii) Farklı denklik sınıfları ikişer ikişer ayrıktır (önerme 1.2.7)

(iii) $\forall a \in A$ nın $a \in \bar{a}$ olduğundan $A = \bigcup \bar{a}$, yani bütün denklik sınıfları kümesinin birleşiminin A yı verdiğini görürüz.

Tersine, $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi A nın bir ayrışımı olsun. A da bir R bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$a, b \in A$ için $aRb \Leftrightarrow \exists i \in I$ için $a, b \in A_i$. R bağıntısının denklik bağıntısı old. göst.

(i) yansıma: $\forall a \in A$ için aRa olduğundan yansıma öz. sağlar.

(ii) aRb olsun. bRa mıdır?

$aRb \Rightarrow \exists i \in I$ için $a, b \in A_i$ dir. Yani a ve b aynı ayrışım kümesinde $(b, a \in A_i)$ olduğundan bRa olur simetri öz. sağlar.

(iii) aRb ve bRc olsun

$aRb \Leftrightarrow \exists i \in I$ $a, b \in A_i$

$bRc \Leftrightarrow \exists j \in I$ $b, c \in A_j$

Yani R nin tanımı gereği a ile b ve b ile c aynı ayrışım sınıfında diğer bir ifadeyle a, b, c elemanlarının üçü de aynı ayrışım kümesinde olurlar. Bundan dolayı aRc olup geçişme öz. gerçeklenir. Sonuç olarak R bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.2.9. Bir A kümesi üzerinde $\leq$ bağıntısı yansıyan, ters simetrik ve geçişmeli ise $\leq$ bağıntısına A üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı denir ve $(A, \leq)$ ikilisine bir kısmi sıralı küme (KSK) denir.

Örnek: A bir küme ve A nın bütün alt kümelerinin kümesi $P(A)$ olsun. Küme içerme bağıntısı "$\subseteq$", $P(A)$ üzerinde bir ~~KS~~ kısmi sıralama bağıntısıdır. $P(A)$ ya A nın kuvvet kümesi denir.

Tanım 1.2.10. $(A, \leq)$ bir KSK olsun. Eğer $a, b \in A$ için $a \leq b$ ya da $b \leq a$ ise a ve b elemanlarına kıyaslanabilir veya karşılaştırılabilir elemanlar denir. Eğer A nın her eleman çifti kıyaslanabilir ise $\leq$ bağıntısına tam sıralama bağıntısı denir ve $(A, \leq)$ ikilisine de tam sıralı küme denir. A nın tam sıralı her alt kümesine bir zincir adı verilir.

Örnek: $P(A)=\{X \mid X \subseteq A\}$

$X, Y \in P(A)$ için $X \leq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$ bağıntısı verilsin. "$\leq$" bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

(i) $X \subseteq X$ olduğundan yansıma öz. gerçeklenir. $X \leq X$ dir.

(ii) $X \leq Y$ ve $Y \leq X$ olsun. Acaba $X=Y$ midir?

$$\left.\begin{array}{l} X \leq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \\ Y \leq X \Leftrightarrow Y \subseteq X \end{array}\right\} \Rightarrow X = Y$$

olup ters simetri öz. gerç.

(iii) $X, Y, Z \in P(A)$ için $X \leq Y$ ve $Y \leq Z$ olsun. $X \leq Z$ midir?

$$\left.\begin{array}{l} X \leq Y \Rightarrow X \subseteq Y \\ Y \leq Z \Rightarrow Y \subseteq Z \end{array}\right\} \Rightarrow X \subseteq Z$$

olup $X \leq Z$ dir. Geçişme öz. gerç. Verilen bağıntı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 1.2.11 $(A, \leq)$ bir KSK olsun.

(i) $m \in A$ olsun. A da m den büyük hiçbir eleman yoksa, yani $\forall a \, [a \in A \wedge m \leq a] \Rightarrow a = m$ ise, $m \in A$ ya A nın bir **maksimal elemanı** denir ve $Mak(A)$ ile gösterilir.

(ii) $\forall a \, [a \in A \wedge a \leq n] \Rightarrow a = n$ ise, $n \in A$ ya A nın bir **minimal elemanı** denir ve $Min(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.12. $(A, \leq)$ bir KSK olsun.

(i) $\forall a \in A$ için $a \leq m$ o.ş. bir $m \in A$ varsa m ye A nın **en büyük elemanı** denir ve $m = EBE(A)$ ile göst.

(ii) $\forall a \in A$ için $n \leq a$ o.ş. bir $n \in A$ varsa n ye A nın **en küçük elemanı** denir ve $n = EKE(A)$ ile göst.

Tanım 1.2.13. $(A,\leq)$ bir KSK olsun. Eğer A nın boştan farklı her alt kümesinin en küçük elemanı varsa $\leq$ bağıntısına bir iyi sıralama bağıntısı ve $(A,\leq)$ KSK de bir iyi sıralı küme denir.

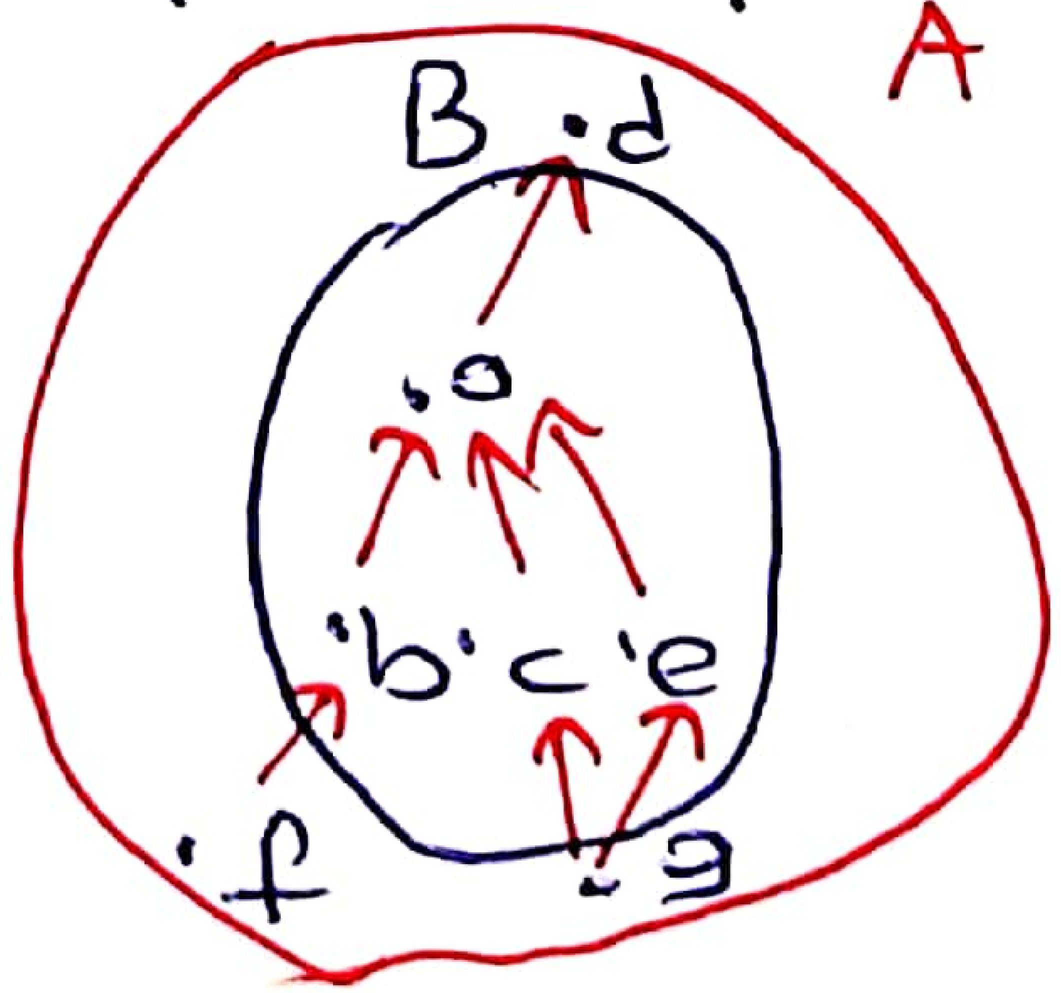
$(\mathbb{Z}^+,\leq)$ KSK dır.

Örnek. $(\mathbb{Z}^+,\leq)$ iyi sıralı kümedir. $\underline{1}$ $\{1,2,3\} \to 1$ $\{3,4,5\} \to 3$

Teorem 1.2.14. (Zorn Lemma) A boş olmayan kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer A nın her tam sıralı alt kümesinin yani, zincirinin ~~A da~~ bir üst sınırı varsa A nın bir maksimal elemanı vardır.

$f=f$ $g=g$ $\underline{d=d}$ $f\to b$ $a\to d$

Örnek: $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $B=\{a,b,c,e\}$ $x\leq y \iff x=y$ veya $x\to y$
$(A,\leq)$ ve $(B,\leq)$ KSK dır.



mak$(A)=\{d\}$
min$(A)=\{f,g\}$
EBE$(A)=d$, EBE$(B)=a$

EKE(A) yok
EKE(B) yok
mak$(B)=\{a\}$
min$(B)=\{b,c,e\}$

Örnek: $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde $\sim$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanıyor. $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x \sim y \Leftrightarrow |x| \le |y+1|$

$\sim$ bağıntısının özelliklerini inceleyiniz.

(i) Yansıma $x = -5$ alalım. $|-5| \le |-5+1|$?

$\underline{5 \not\le 4}$ old. dan yansıma öz. gerç.

(ii) $x=3, y=5$ alalım. $3 \sim 5$ dir. yani $|3| \le |5+1| \Rightarrow 3 \le 6$ dır.

Acaba $5 \sim 3$ müdür? $|5| \le |3+1| \Rightarrow |5| \le |4| \Rightarrow 5 \not\le 4$ old. dan simetri öz. gerçeklemez.

(iii) Geçişme öz. $x, y, z \in \mathbb{Z}$ için $x \sim y$ ve $y \sim z$ olsun $x \sim z$ midir? $x = 4, y = 3, z = 2$ alalım.

$x \sim y \Rightarrow 4 \sim 3 \Rightarrow |4| \le |3+1| \Rightarrow 4 \le 4$

$y \sim z \Rightarrow 3 \sim 2 \Rightarrow |3| \le |2+1| \Rightarrow 3 \le 3$

yani $4 \sim 2$ midir? $|4| \le |2+1| \Rightarrow 4 \not\le 3$ olmadığından geçişme öz. gerç.

Örnek: İyi sıralı bir kümenin, her alt kümesinin de iyi sıralı old. göst.

Çözüm: A iyi sıralı bir küme olsun. $B \subseteq A$ olmak üzere B nin iyi sıralı küme old. gösterelim. Bunun için $X \in B$ alalım. X in bir en küçük elemana sahip old. // . $X \subseteq B \subseteq A$ old. dan $X \subseteq A$ dır. A iyi sıralı küme old. dan X bir en küçük elemana sahiptir. Bundan dolayı B iyi sıralı kümedir.